1) a) İlgili teoremler ders notlarında mevcuttur.

b) İlgili teoremler ders notlarında mevcuttur.

2) a) $\mathbb{Z}[i]$ de 5 ve 7 asal olur mu?

$5 = \alpha . \beta$

$\Rightarrow N(5) = N(\alpha).N(\beta)$

$\Rightarrow 25 = N(\alpha) \cdot N(\beta)$

$\Rightarrow N(\alpha) = 1, 5, 25$; $\alpha = a+bi \Rightarrow N(\alpha) = a^2+b^2$

$\Rightarrow a^2+b^2=5$

$\Rightarrow \alpha = 2+i$, $\beta = 2-i$ olup $5 = (2+i)(2-i)$ olduğundan 5 asal değildir. Benzer şekilde

$7 = \alpha \beta$

$\Rightarrow N(7) = N(\alpha) . N(\beta)$

$\Rightarrow 49 = N(\alpha). N(\beta)$

$\Rightarrow N(\alpha) = 1, 7, 49$; $\alpha = a+bi \Rightarrow N(\alpha) = a^2+b^2$

$\Rightarrow a^2+b^2 = 7$ o.ş $a, b \in \mathbb{Z}$ yoktur. 7 asaldır.

b) $S+I = \{ s+a : s \in S, a \in I \}$, S, R'nin alt halkası I, R'nin ideali olsun.

$S+I$, R'nin ideali olur mu?

. $S+I \neq \emptyset$

. $S+I \subseteq R$

− $\forall s_1+a_1, s_2+a_2 \in S+I$ için

$s_1+a_1-(s_2+a_2) = \underbrace{s_1-s_2}_{\in S} + \underbrace{a_1-a_2}_{\in I} \in S+I$

− $\forall r \in R$ ve $\forall s+a \in S+I$ için

$r(s+a)$ ve $(s+a)r \in S+I$ olur mu?

$r(s+a) = rs + \underbrace{ra}_{\in I}$; $rs \in S$ diyemeyiz. $r(s+a) \in S+I$ olmak zorunda değildir. $S+I$, R'nin ideali değildir.

3) a) R T.B olsun R'nin her ideali asal ideal ise R cisimdir. Gösteriniz.

Çözüm : R'nin cisim olduğunu göst. için sıfırdan farklı her elemanının tersinebilir olduğunu gösterelim.

$a \neq 0$, keyfi bir $a \in R$ olsun. $a.b = 1_R$ o.ş $b \in R$ bulmalıyız.

$a.a \in \langle a^2 \rangle \Rightarrow a \in \langle a^2 \rangle$

$\langle a^2 \rangle = \{ a^2 r \mid r \in R \}$, R birimli değişmeli olduğundan

$a \in \langle a^2 \rangle \Rightarrow a \in a^2 R$

$\Rightarrow a = a^2 b$ o.ş $b \in R$ var

$\Rightarrow a - a^2 b = 0_R$

$\Rightarrow a(1_R - ab) = 0_R$

$a \neq 0$, R T.B $\Rightarrow 1_R - ab = 0$

$\Rightarrow ab = 1_R$, R T B old. değişmeli $ab = ba = 1_R$ o.ş

$b \in R$ vardır a, tersinebilir ve R cisimdir.

b) $f(x) = x^5 + 12x^4 + 9x^2 + 6 \in \mathbb{Z}[x]$ için

$I = \langle f(x) \rangle$ ideali $\mathbb{Z}[x]$ de maksimal olur mu?

Çözüm : $f(x)$, $\mathbb{Z}[x]$ de asal ise $\mathbb{Z}[x] / \langle f(x) \rangle$ cisim

olup $\mathbb{Z}[x] / \langle f(x) \rangle$ cisim ise $\langle f(x) \rangle$, $\mathbb{Z}[x]$ de maksimaldir

O halde $f(x)$, $\mathbb{Z}[x]$ de asal mıdır? bulalım.

Eisenstein kriterine göre $p = 3$ alınırsa $3 \mid 6$, $3 \mid 9$, $3 \mid 12$, $3 \nmid 1$, $9 \nmid 6$ old. $f(x)$ $\mathbb{Q}[x]$ de asaldır

Polinom ilkel old. $f(x)$, $\mathbb{Z}[x]$ de asaldır. Yani $\langle f(x) \rangle$ ideali maksimal

4 a) $2-5i$ ve $10+i$ sayılarının ebobunu bulalım

$$\frac{10+i}{2-5i} = \frac{(10+i)(2+5i)}{29} = \frac{15+52i}{29}$$
$(2+5i)$
$$= 1+2i$$

$$10+i = (1+2i)(2-5i)+k_1$$

$$k_1 = -2+2i$$

$$\frac{2-5i}{-2+2i} = \frac{(2-5i)(-2-2i)}{8} = \frac{-14}{8}+\frac{6i}{8}$$
$(-2-2i)$
$$= -2+i$$

$$2-5i = (-2+i)(-2+2i)+k_2$$

$$k_2 = i$$

$$\frac{-2+2i}{i} = 2+2i$$
$(-i)$

$$-2+2i = (2+2i).i+k_3$$

$$k_3 = 0$$

EBOB i olup aralarında asaldırlar

b) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_8$, $a \in \mathbb{Z}$ için $f(a)=\overline{a}$ ile tanımlanan bir halka homomorfizması olsun. Bu homomorfizmanın çekirdeğini kapsayan ideallerin görüntülerini bulunuz.

Çözüm: $Çek f = \{a \in \mathbb{Z} \mid f(a) = 0_{\mathbb{Z}_8}\}$
$= \{a \in \mathbb{Z} \mid \overline{a} = \overline{0}_{\mathbb{Z}_8}\}$
$= \{0, 8, 16, \dots\} = 8\mathbb{Z}$ olduğundan

Çekirdeği kapsayan idealler $\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}$ ve $8\mathbb{Z}$
$f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_8$, $f(2\mathbb{Z}) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$, $f(4\mathbb{Z}) = \{\overline{0}, \overline{4}\}$, $f(8\mathbb{Z}) = \{\overline{0}\}$
olarak bulunur.

5) $x^5+10x+28$, x^4+5x^2+4 polinomları için
$f(x)=x^5+10x+28$ için
$f(x+1)=(x+1)^5+10(x+1)+28$
$=x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1+10x+10+28$
$=x^5+5x^4+10x^3+10x^2+15x+39$
$f(x+1+1)=(x+1)^5+5(x+1)^4+10(x+1)^3+10(x+1)^2+15x+15+39$
$=x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1+5x^4+20x^3+30x^2+$
$20x+5+10x^3+30x^2+30x+10+10x^2+20x+10+15x$
$+54$
$=x^5+10x^4+40x^3+80x^2+90x+80$
$p=5$ alınırsa $5|80, 5|90, 5|80, 5|40, 5|10, 5\nmid 1$
$25\nmid 80$ old. Eisenstein indirgenemezdir
$\mathbb{Q}[x]$ de indirgenemezdir Polinom ilkel old $\mathbb{Z}[x]$ indirgenemezdir
rasyonel kök teoreminden
$f(x)=x^4+5x^2+4$ polinomu için
$\left.\begin{array}{l} u|a_0 \Rightarrow u|4 \Rightarrow u=\{\pm1,\pm2,\pm4\} \\ v|a_n \Rightarrow v|1 \Rightarrow v=\{\pm1\} \end{array}\right\} \frac{u}{v}=\{\pm1,\pm2,\pm4\}$
$f(1)\neq0, f(-1)\neq0, f(2), f(-2), f(4), f(-4)\neq0$
O halde $f(x)$'in $\mathbb{Q}[x]$ de 1 dereceden çarpanı yoktur
$(x^4+5x^2+4)=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$
$=(x^4+(a+c)x^3+(d+b+ac)x^2+(ad+bc)x+bd)$

$a+c=0$
$d+b+ac=5$
$ad+bc=0$
$bd=4$

$b=2$, $d=2$ alınırsa
$4+ac=5$
$\Rightarrow ac=1$
$\Rightarrow a=1$ $c=-1$ olup
$x^4+5x^2+4=(x^2+x+2)(x^2-x+2)$ indirgenebilir
$\mathbb{Q}[x]$ de indirgenebilir ilkel old. $\mathbb{Z}[x]$ indirgenebilir